מועד ב', סמסטר חורף תשפ"ו - אלגברה 1מ1, 1040064
13.3.26

פתרונות מלאים

ת"ז :		פקולטה :	

- נא למלא את מספר ת"ז שלכם בתיבה המתאימה בדף זה, בכתב ברור וקריא.
- משך המבחן : 3 שעות.
- השימוש בחומר עזר כלשהו ובמחשבונים אסור בהחלט.
- רשמו את כל תשובותיכם בדפים אלה. אפשר להשתמש בשני צידי הדף.
- **לרשותכם מחברות טיוטה. מחברות הטיוטה לא יאספו.**
- **בשאלות 1-3** יש **לנמק** היטב כל תשובה. **תשובה לא מנומקת לא תחשב**.
  בשאלות 4-7 יש לרשום את האות של התשובה הנכונה **כאות אנגלית גדולה** (A,B...) **בתוך התיבה** המתאימה תחת כל שאלה.
- **אין לתת נימוקים בשאלות 4-7.** נימוקים, אם יהיו, לא יבדקו.
- שאלת ש"ב (המהווה גם 10% מגן) היא 3-א'.
- **ההתאמות למילואימניקים מופיעות בעמוד הבא.**

ב ה צ ל ח ה !

שאלה מס' 1 : (23 נקודות)

תהי $T:\mathbb{R}_3[x]\to\mathbb{R}^4$ העתקה לינארית המוגדרת ע"י :

$$T(p(x))=\left(p(0)\ ,\ p'(1)\ ,\ p'(0)\ ,\ p'(0)+p'(1)\right)$$

א. (5 נק') מצאו בסיס ומימד לגרעין של T .

ב. (5 נק') מצאו בסיס לתמונה של T , כך שסכום הרכיבים בכל וקטור בבסיס זה שווה 10.

ג. (5 נק') הוכיחו כי $u=(1,2,3,5)\in \operatorname{Im}T$ ומצאו את קבוצת כל הפולינומים $q(x)\in\mathbb{R}_3[x]$ המקיימים $T(q(x))=u$, והסבירו האם קבוצה זו מהווה תת מרחב של $\mathbb{R}_3[x]$.

ד. (5 נק') הוכיחו כי לכל $k\in\mathbb{R}$ קיים $g(x)\in \operatorname{Ker}(T)$ המקיים $g(1)=k$.

ה. (3 נק') נגדיר העתקה לינארית אחרת $T_1:\mathbb{R}_4[x]\to\mathbb{R}^4$ ע"י אותה נוסחה בדיוק.
הוכיחו או הפריכו : $\dim(KerT_1)=\dim(KerT)$.

פתרון שאלה 1:

א. גרעין : נרשום את ההעתקה באמצעות פרמטרים ונשווה ל- 0 למציאת הגרעין :

$$T(p(x))=\left(p(0)\ ,\ p'(1)\ ,\ p'(0)\ ,\ p'(0)+p'(1)\right)$$

$$T(a+bx+cx^2+dx^3)=(a\ ,\ b+2c+3d\ ,\ b\ ,\ 2b+2c+3d)$$

$$\begin{cases} a=0 \\ b+2c+3d=0 \\ b=0 \\ 2b+2c+3d=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ 2c+3d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=-\frac{3}{2}d \end{cases}$$

$$\ker T=\left\{-\tfrac{3}{2}dx^2+dx^3\ \middle|\ d\in\mathbb{R}\right\}=span\left\{-\tfrac{3}{2}x^2+x^3\right\}$$

קיבלנו כי הגרעין נפרש ע"י פולינום שונה מאפס, מכאן כי בסיס לגרעין הוא : $B_{KerT}=\left\{-\frac{3}{2}x^2+x^3\right\}$
והמימד הוא 1.

ב. תמונה : לפי משפט המימדים, מימד התמונה הוא :
$\dim \operatorname{Im}T=\dim\mathbb{R}_3[x]-\dim KerT=4-1=3$. נמצא קבוצה פורשת לתמונה ונדרג אותה לקבלת קבוצה פורשת ובת"ל שתהווה בסיס לתמונה. אחר כך, נתקן לקבלת בסיס המקיים את התנאי המבוקש :

$$T(a+bx+cx^2+dx^3)=(a\,,\,b+2c+3d\,,\,b\,,\,2b+2c+3d)$$
$$a(1,0,0,0)+b(0,1,1,2)+c(0,2,0,2)+d(0,3,0,3)$$
$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&2\\0&2&0&2\\0&3&0&3\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

השורות השונות מאפס אחרי דרוג פורשו את אותו מרחב וגם בלתי תלויות לינארית ולכן:
$B_{\mathrm{Im}T}=\{(1,0,0,0)\,,\,(0,1,0,1)\,,\,(0,0,1,1)\}$.

עתה נדאג שסכום הרכיבים יהיה שווה ל- 10 ע״י ביצוע פעולות של חיבור וכפל בסקלר בין וקטורי הבסיס שכבר מצאנו.
למשל, סכם הרכיבים בוקטור הראשון הוא 1 לכן נכפול אותו ב- 10. ואילו סכום הרכיבים בשני האחרים הוא 2 לכן נכפול ב- 5. לכן בסיס המקיים את הדרישה הוא, למשל:
$B_{\mathrm{Im}T}=\{(10,0,0,0)\,,\,(0,5,0,5)\,,\,(0,0,5,5)\}$.

ג. נחפש את קבוצת המקורות לווקטור הנתון. אם נמצא, זה גם יוכיח כי הוקטור נמצא בתמונה. לצורך זה, נפתור:

$$T(a+bx+cx^2+dx^3)=(a\,,\,b+2c+3d\,,\,b\,,\,2b+2c+3d)=(1,2,3,5)$$
$$\begin{cases}a=1\\b+2c+3d=2\\b=3\\2b+2c+3d=5\end{cases}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&1\\0&1&2&3&2\\0&1&0&0&3\\0&2&2&3&5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&1\\0&1&2&3&2\\0&0&-2&-3&1\\0&0&-2&-3&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&3\\0&0&2&3&-1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$
$$\begin{cases}a=1\\b=3\\2c+3d=-1\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}a=1\\b=3\\c=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}d\end{cases}$$
$$\left\{1+3x+(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{3}{2}d)x^2+dx^3\,\middle|\,d\in\mathbb{R}\right\}$$

קיבלנו כי למערכת יש פתרון ולכן הוקטור בתמונה. בנוסף, קיבלנו שיש אינסוף איברים בקבוצת המקורות. קבוצה זו לא מהווה תת מרחב וקטורי של $\mathbb{R}_3[x]$ כי למשל פולינום האפס לא נמצא בקבוצה. פולינום האפס הוא מקור של וקטור האפס בלבד.

ד. לפי סעיף א׳, $\ker T=\left\{-\frac{3}{2}dx^2+dx^3\,\middle|\,d\in\mathbb{R}\right\}=span\left\{-\frac{3}{2}x^2+x^3\right\}$ לכן $g(x)$ הוא מהצורה:
$g(x)=-\frac{3}{2}dx^2+dx^3$. נציב 1 ונשווה ל- k: $g(1)=-\frac{3}{2}d+d=k$. לכן לכל $k\in\mathbb{R}$, אם נבחר:
$d=-2k$ נקבל: $g(1)=-\frac{3}{2}(-2k)\cdot1^2+(-2k)\cdot1^3=3k-2k=k$ כנדרש.

ה. הטענה לא נכונה. מאחר וזו אותה נוסחה בדיוק, הרי שמימד התמונה לא משתנה כלומר:
$\dim\mathrm{Im}T_1=3$ ולכן, לפי משפט המימדים השני נקבל:
$\dim KerT_1=\dim\mathbb{R}_4[x]-\dim\mathrm{Im}T_1=5-3=2\neq\dim KerT=1$.
כמובן כי ניתן לחשב ישירות את הגרעין של T_1 ולקבל מימד 2 במקום 1.

<u>שאלה מס' 2</u> : (23 נקודות)

תהי $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ המטריצה הבאה:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ a & 2a & 3a\end{pmatrix}.$$

א. (4 נק') מצאו לאילו ערכים של הפרמטר a המטריצה A לכסינה.

בסעיפים ב'-ד' נתון כי $trace(A)=-3$.

ב. (8 נק') הוכיחו כי A לכסינה מעל $\mathbb{R}$ ומצאו מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D כך ש $P^{-1}AP=D$.

ג. (7 נק') יהיו $\lambda_1<\lambda_2$ שני ערכים עצמיים שונים של A. נסמן ב- V_1,V_2 את המרחבים העצמיים שלהם בהתאמה. הוכיחו כי $\mathbb{R}^3=V_1\oplus V_2$, ומצאו $u_1\in V_1$, $u_2\in V_2$ כך שמתקיים: $(4,1,-4)=u_1+u_2$.

ד. (4 נק') יהי $S:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$ אופרטור לינארי כך ש: $[S]_B=A+3I$, כאשר $B=\{1,1+x,(1+x)^2\}$ בסיס סדור של $\mathbb{R}_2[x]$. מצאו בסיס ומימד לגרעין של S.

<u>פתרון שאלה 2:</u>

א. ניתן לראות כי לכל a מתקיים $rank(A)=1$ כי כל שורה היא כפולה של השורה הראשונה. לפי תרגיל ידוע, מטריצה מדרגה 1 לכסינה אם"ם מתקיים: $trace(A)\neq 0$ ולכן במקרה שלנו A לכסינה אם"ם $1+2+3a\neq 0$ כלומר אם"ם $a\neq -1$.

ולמי שלא מכיר את התרגיל: כאמור, לכל a מתקיים $rank(A)=1<n=3$, לכן A לא הפיכה ו- $\lambda_1=0$ הוא ערך עצמי של A מר"ג $3-r(A-0I)=3-r(A)=3-1=2$. לכן כדי ש- A תהייה לכסינה צריך שהר"א של $\lambda_1=0$ יהיה שווה 2 (ולא יותר כלומר לא 3), וזה אומר שיש ל- A ע"ע נוסף שונה מ- 0. מאחר וסכום ע"ע שווה לעקבה, נובע: $trace(A)=0+0+\lambda_2=\lambda_2$. לכן, כדי ש- A תהייה לכסינה, נדרוש: $\lambda_2=trace(A)\neq 0$ כלומר $a\neq -1$. עכשיו לכל ע"ע מתקיים ר"א שווה לר"ג ולכן A לכסינה.

אפשרות נוספת היא למצוא את הפולינום האופייני של A ואז מקבלים: $\lambda^2\left(\lambda-(3a+3)\right)$ לכן ע"ע הם $\lambda_1=0$, $\lambda_2=3a+3$ ואז יש להפריד למקרה שבו $0=\lambda_1=\lambda_2$ כלומר $a=-1$ ואז ר"א של 0 הוא 3 אבל ר"ג הוא 2 ולכן לא לכסינה, לבין $\lambda_1\neq\lambda_2$ ואז לכל ע"ע ר"א=ר"ג והמטריצה לכסינה.

ב. נתון $trace(A)=-3$ ולכן $\lambda_2=trace(A)=-3$ בנוסף, לפי סעיף א', $trace(A)\neq 0$ ולכן A לכסינה.

נבחין כי בנוסף נובע ש: $1+2+3a=-3$ כלומר $a=-2$ ו- $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ -2 & -4 & -6\end{pmatrix}$.

לכן נימוק נוסף לליכסון הוא: מצאנו בסעיף א' שהמטריצה לכסינה לכל $a\neq -1$ וכאן $a\neq -2$.

אומנם לא ביקשו אבל נובע כי הפולינום האופייני של A הוא: $\lambda^2(\lambda+3)$.

הערכים עצמיים ממשיים לכן לכסינה מעל $\mathbb{R}$ ומתקיים:

$\lambda_1=0$ מריבוי אלגברי וגיאומטרי 2;

$\lambda_2=-3$ מריבוי אלגברי וגיאומטרי 1;

נמצא וקטורים עצמיים:

עבור $\lambda_1=0$ נפתור $(A-0I)\bar{x}=A\bar{x}=0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -2 & -4 & -6 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\{a+2b+3c=0 \quad \Rightarrow \quad (a,b,c)=(-2b-3c,b,c)=b(-2,1,0)+c(-3,0,1)$$

הווקטורים $\{(-2,1,0),\ (-3,0,1)\}$ פורשים את המרחב העצמי של $\lambda_1=0$ ולא פרופ׳ לכן בסיס.

עבור $\lambda_2=-3$ נפתור $(A+3I)\bar{x}=0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \\ -2 & -4 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ -2 & -4 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -18 & -9 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1-3R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} a-b=0 \\ 2b+c=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (a,b,c)=(b,b,-2b)=c(1,1,-2)$$

הווקטור $\{(1,1,-2)\}$ פורש את המרחב העצמי של $\lambda_2=-3$ ושונה מ- 0 לכן בסיס.
מכאן נקבל כי:

$$P=\begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \ , \ D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

ג. לפי הסימונים בשאלה, מתקיים: $B_{V_1}=\{(-2,1,0),\ (-3,0,1)\}$, $B_{V_2}=\{(1,1,-2)\}$. שימו לב שבסימוני פתרון זה מתקיים דווקא $\lambda_1>\lambda_2$ אבל זה לא משפיע על המשך הפתרון.
לפי משפט וקטורים עצמיים השייכים לע״ע שונים הם בלתי תלויים לינארית ולכן מתקיים $V_1\cap V_2=\{0\}$. בנוסף, $\{(-2,1,0),\ (-3,0,1)\ ,\ (1,1,-2)\}$ בלתי תלויים ליניארית. מימד $\dim\mathbb{R}^3=3$ ולכן זה בסיס ל- $\mathbb{R}^3$. כלומר הקבוצה הפורשת את V_1+V_2 היא בסיס למרחב כולו והחיתוך בניהם אפס, ולכן $\mathbb{R}^3=V_1\oplus V_2$. נמצא $u_1\in V_1,\ u_2\in V_2$ כך ש- $(4,1,-4)=u_1+u_2$. לכן $u_1\in V_1$ $u_1=\alpha(-2,1,0)+\beta(-3,0,1)=(-2\alpha-3\beta,\alpha,\beta)$. $u_2\in V_2$ ולכן $u_2=\gamma(1,1,-2)=(\gamma,\gamma,-2\gamma)$.
נקבל $(4,1,-4)=u_1+u_2=(-2\alpha-3\beta,\alpha,\beta)+(\gamma,\gamma,-2\gamma)$. לכן המשוואות הן:

$$(4,1,-4)=(-2\alpha-3\beta,\alpha,\beta)+(\gamma,\gamma,-2\gamma)$$

$$\begin{cases} -2\alpha-3\beta+\gamma=4 \\ \alpha+\gamma=1 \\ \beta-2\gamma=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\gamma=1 \\ -2\alpha-3\beta+\gamma=4 \\ \beta-2\gamma=-4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} \alpha=-1 \\ \beta=0 \\ \gamma=2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (4.1.-4)=u_1+u_2=(2,-1,0)+(2,2,-4)$$

ד. נתון: $[S]_B=A+3I$ לכן הע״ע של S הם הע״ע של $[S]_B$ כלומר: $\{0+3,0+3,-3+3\}=\{3,3,0\}$ עם אותם וקטורים עצמיים כמו של A בהתאמה. הגרעין של S זה המרחב העצמי של הע״ע 0 ולכן בסיס למרחב העצמי של 0, כלומר לגרעין של S לפי הבסיס B הוא הוקטור העצמי של הערך העצמי $\lambda_2=-3$ במטריצה A כלומר בסיס לגרעין של S הוא: $B_{KerS}=\{1\cdot1+1\cdot(1+x)-2(1+x)^2\}=\{-3x-2x^2\}$.

<u>שאלה מס' 3</u> : (34 נקודות) **סעיף א' בשאלה זו מהווה שאלת ש"ב.**

בשאלה זו 4 סעיפים. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. (10 נק') אם $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ לא הפיכה, אז קיימת מטריצה $B \neq 0$ כך ש $AB = 0$.

הטענה נכונה: נתון שהמטריצה A לא הפיכה ולכן לפי משפט השקולים למערכת $A\overline{x} = 0$ יש פתרון לא טריוויאלי $v \in \mathbb{R}^n$. נבנה מטריצה B שהעמודה הראשונה שלה היא v ושאר העמודות הן 0 כלומר: $B = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v & 0 & \dots & 0 \\ | & | & & | \end{pmatrix}$. אז $B \neq 0$ כי $v \neq 0$, מתקיים: $AB = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ Av & A0 & \dots & A0 \\ | & | & & | \end{pmatrix} = 0$.

ב. (8 נק') לכל מטריצה $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ קיימות מטריצות $B, C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ כך ש $AB = BA,\ CA = AC$ וגם $\{B, C\}$ בלתי תלויה לינארית.

הטענה נכונה: אם A סקלרית אז $A = \alpha I$ ולכן לכל מטריצה $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ מתקיים:
$AB = (\alpha I)B = \alpha IB = \alpha BI = B(\alpha I) = BA$ לכן נבחר 2 מטריצות כלשהן לא סקלריות שהן בלתי תלויות לינאריות (יש לפחות 8 בלתי תלויות כי מימד המטריצות מסדר 3 הוא 9) והטענה נכונה.
אם A לא סקלרית אז $\{A, I\}$ בלתי תלויות ליניאריות ולכן נוכל לבחור: $B = A, C = I$ ונקבל שהטענה נכונה.

ג. (8 נק') קיימת העתקה לינארית $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ כך ש:

$$Ker(T) = \{(a,b,c,d,e) \mid a = b\ ,\ c = d = e\}$$

הטענה לא נכונה: אם היתה קיימת העתקה כזו, הרי $Ker(T) = \{(a,a,c,c,c) \mid a,\ c \in \mathbb{R}\}$ ולכן מימד הגרעין הוא 2 (נימוק אחר: יש בקבוצה 5 נעלמים ו- 3 משוואות בלתי תלויות). לפי משפט המימדים השני נובע כי מימד התמונה הוא: $\dim \operatorname{Im} T = \dim \mathbb{R}^5 - \dim KerT = 5 - 2 = 3$. אבל התמונה נמצאת ב- $\mathbb{R}^2$ ולכן המימד שלה לא יכול להיות 3.

ד. (8 נק') תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. אם A לכסינה אז $rank(A) = rank(A^k)$ לכל k שלם חיובי.

הטענה נכונה: נתון ש- A לכסינה ולכן קיימות P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש $A = PDP^{-1}$. לפי טענה ידועה מתקיים: $A^k = PD^kP^{-1}$, כלומר A^k דומה ל- D^k. לפי משפט שמורות דמיון, מתקיים $rank(A) = rank(D)$ וגם $rank(A^k) = rank(D^k)$. אבל $rank(D) = rank(D^k)$ כי הדרגה של מטריצה אלכסונית שווה למספר האיברים השונים מ- 0 באלכסון. מאחר וכאשר מעלים בחזקה מטריצה אלכסונית, מעלים בחזקה רק את איברי האלכסון, אז מספר האפסים באלכסון לא משתנה. ובסה"כ קיבלנו: $rank(A) = rank(D) = rank(D^k) = rank(A^k)$.

בשאלות 4-7 יש לרשום את האות של התשובה הנכונה באות אנגלית גדולה (A,B...) בתוך התיבה המתאימה תחת כל שאלה

שאלה מס' 4: (5 נקודות)

תהי: $A=\begin{pmatrix} z & 1 & 0 \\ 0 & z & 1 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{3\times 3}$ נסמן ב- $z_1,z_2,...,z_k\in\mathbb{C}$ את כל הפתרונות השונים מ- 0 של המשוואה $trace(A^5)=12\bar{z}$. יהי $t=z_1\cdot z_2\cdot\cdots\cdot z_k$. אזי:

A. t ממשי חיובי.

B. t ממשי שלילי.

C. מתקיים: $\mathrm{Re}(t)=\mathrm{Im}(t)$.

D. $90^\circ<\arg(t)<180^\circ$.

E. $\arg(t)=270^\circ$.

גרסה 2: $trace(A^4)=12\bar{z}$ ואז יוצא ממשי חיובי.

פתרון שאלה 4:

נפתור את המשוואה. תחילה נזכור כי כאשר מעלים מטריצה משולשת עליונה (או תחתונה) בחזקה, אז איברי האלכסון מועלים בחזקה המתאימה, כלומר $A^5=\begin{pmatrix} z^5 & * & * \\ 0 & z^5 & * \\ 0 & 0 & z^5 \end{pmatrix}$ ולכן:

$trace(A^5)=3z^5=12\bar{z}$ והמשוואה היא: $z^5=4\bar{z}$. נפתור בייצוג טריגונומטרי. נציב $z=rcis\theta$ ונקבל: $r^5cis(5\theta)=4rcis(-\theta)$. לפי המסיחים, מספיק להתרכז רק בארגומנטים של הפתרונות השוני מ- 0. מהשוואת הארגומנטים, עד כדי 360°, של המשוואה נקבל: $5\theta=-\theta+360^\circ k$ כלומר $6\theta=360^\circ k$ או $\theta=60^\circ k$. ולכן 6 הארגומנטים הם: 0° , 60° , 120° , 180° , 240° , 300°. מאחר וארגומנט המכפלה שווה לסכום הארגומנטים נקבל:

$\arg(t)=0^\circ+60^\circ+120^\circ+180^\circ+240^\circ+300^\circ=900^\circ\equiv 180^\circ$ ולכן t ממשי שלילי.

בגירסה 2, החזקה היא 4 ולכן המשוואה היא: $4\theta=-\theta+360^\circ k$ או $5\theta=360^\circ k$ או $\theta=72^\circ k$. ולכן 5 הארגומנטים הם: 0° , 72° , 144° , 216° , 288°. ובאותו אופן,

$\arg(t)=0^\circ+72^\circ+144^\circ+216^\circ+288^\circ=720^\circ=0^\circ$ ולכן t ממשי חיובי.

שאלה מס' 5 : (5 נקודות)

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F ויהיו v_1,v_2,v_3,v_4 וקטורים ב- V. נתון כי:

$$v_4 \in span\{v_1,v_2,v_3\} \quad , \quad v_4 \notin span\{v_1,v_2\}$$

סמנו את הטענה **היחידה** שבהכרח נכונה, מבין הטענות הבאות:

A. $v_4 = \alpha v_3$.

B. $v_3 \in span\{v_1,v_2,v_4\}$.

C. $\dim\left(span\{v_1,v_2,v_3\}\right) \neq 3$.

D. $span\{v_1,v_2\} \cap span\{v_3,v_4\} = \{0\}$.

E. $\dim\left(span\{v_1,v_2,v_3,v_4\}\right) = 3$.

פתרון שאלה 5:

א. **לא נכון**. נבחר $v_1=(1,0,0,0)$, $v_2=(0,1,0,0)$, $v_3=(0,0,1,0)$, $v_4=(1,1,1,0)$ אז תנאי השאלה מתקיימים אבל $v_4 \neq \alpha v_3$.

ב. **נכון**. מהנתון נובע כי קיימים סקלרים: $v_4 = av_1+bv_2+cv_3$. אם $c=0$ נקבל $v_4 = av_1+bv_2$ כלומר $v_4 \in span\{v_1,v_2\}$ בסתירה לנתון. ולכן $c \neq 0$ ונוכל לקבל: $v_3 = -\frac{a}{c}v_1 - \frac{b}{c}v_2 + \frac{1}{c}v_4$ כלומר $v_3 \in span\{v_1,v_2,v_4\}$.

ג. **לא נכון**. אותה דוגמא שבסעיף א', ומתקיים: $\dim\left(span\{v_1,v_2,v_3\}\right)=3$.

ד. **לא נכון**. נבחר $v_1=(1,0,0,0)$, $v_2=(0,1,0,0)$, $v_3=(0,1,1,0)$, $v_4=(1,1,1,0)$ אז תנאי השאלה מתקיימים אבל $span\{v_1,v_2\} \cap span\{v_3,v_4\} \neq \{0\}$ כי $v_1 = v_4 - v_3$ לכן $v_1 \in span\{v_1,v_2\} \cap span\{v_3,v_4\}$.

ה. **לא נכון**. נבחר $v_1=(1,0,0,0)$, $v_2=(1,0,0,0)$, $v_3=(0,1,0,0)$, $v_4=(1,1,0,0)$ אז תנאי השאלה מתקיימים אבל $\dim\left(span\{v_1,v_2,v_3,v_4\}\right)=2$.

שאלה מס' 6 : (5 נקודות)

תהי $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ העתקה לינארית המוגדרת ע"י:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+ay+bz \\ ax+y+cz \\ bx+cy+z \end{pmatrix} \quad , \quad a,b,c \in \mathbb{R}$$

אם $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in Ker(T)$ אזי $2a+b+c$ שווה ל:

A. 1 ; B. 2 ; C. -1 ; D. -2 ; E. 0

פתרון שאלה 6:

מהנתון נובע: $T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+a+b\\a+1+c\\b+c+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. ולכן מתקיים: $\begin{cases}1+a+b=0\\a+1+c=0\\b+c+1=0\end{cases}$ כלומר $\begin{cases}a+b=-1\\a+c=-1\\b+c=-1\end{cases}$ פתרון המשוואה הוא:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&-1\\1&0&1&-1\\0&1&1&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&-1\\0&-1&1&0\\0&1&1&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&-1\\0&-1&1&0\\0&0&2&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&-1\\0&-1&1&0\\0&0&1&-0.5\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-0.5\\0&-1&0&0.5\\0&0&1&-0.5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-0.5\\0&1&0&-0.5\\0&0&1&-0.5\end{array}\right)\Rightarrow\ 2a+b+c=2(-0.5)-0.5-0.5=-2$$

גרסה 2: אם הוקטור $(1,-1,1)$ בגרעין, יוצא: $(a,b,c)=(0.5,-0.5,0.5)$ לכן $2a+b+c=1$:

$$T\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-a+b\\a-1+c\\b-c+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}-a+b=-1\\a+c=1\\b-c=-1\end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&0&-1\\1&0&1&1\\0&1&-1&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&0&-1\\0&1&1&0\\0&1&-1&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}-1&0&-1&-1\\0&1&1&0\\0&0&-2&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}-1&0&-1&-1\\0&1&1&0\\0&0&1&0.5\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1&0&0&-0.5\\0&1&0&-0.5\\0&0&1&0.5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0.5\\0&1&0&-0.5\\0&0&1&0.5\end{array}\right)\Rightarrow\ 2a+b+c=2(0.5)-0.5+0.5=1$$

גרסה 3: אם הוקטור $(1,1,-1)$ בגרעין, יוצא: $(a,b,c)=(-0.5,0.5,0.5)$ לכן $2a+b+c=0$:

$$T\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+a-b\\a+1-c\\b+c-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}a-b=-1\\a-c=-1\\b+c=1\end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&-1\\1&0&-1&-1\\0&1&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&-1\\0&1&-1&0\\0&1&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&-1\\0&1&-1&0\\0&0&2&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&-1\\0&1&-1&0\\0&0&1&0.5\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-0.5\\0&1&0&0.5\\0&0&1&0.5\end{array}\right)\Rightarrow\ 2a+b+c=2(-0.5)+0.5+0.5=0$$

<u>שאלה מס' 7</u> : (5 נקודות)

תהי $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$, כך שמתקיימים כל 3 התנאים הבאים ($i=\sqrt{-1}$) :

(i) $rank(A-iI)=2$

(ii) $|A-I|=0$

(iii) $|A|=1$

אזי :

A. $\lambda=-i$ הוא ערך עצמי של A.

B. $trace(A)=0$.

C. A הפיכה אך לא לכסינה.

D. $A^{79}=A^{-1}$.

E. $A^{10}=I$.

<u>פתרון שאלה 7:</u>

מהנתון הראשון נובע ש- i הוא ערך עצמי של A מר"ג $4-r(A-iI)=4-2=2$. לכן ר"א לפחות 2.

מהנתון השני נובע כי 1 הוא ע"ע מר"א לפחות 1, וחסר ע"ע אחרון λ . מכפלת הע"ע היא הדטרמיננטה ולכן : $\lambda\cdot(i)^2\cdot 1=1$ ולכן $\lambda=-1$ ע"ע מר"א לפחות 1. סה"כ מצאנו 4 ע"ע וסדר המטריצה הוא 4 ולכן מצאנו את כולם. בנוסף לכל ע"ע ר"א שווה ר"ג ולכן המטריצה לכסינה, ודומה לאלכסונית :

$D=\begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. מכאן, ברור ש- A לא נכון. נשים לב שהמטריצה לא ממשית ולכן ע"ע לא ממשיים לא בהכרח באים בזוגות עם הצמוד. העיקבה היא $2i$ ולכן גם B לא נכון. מצאנו ש A לכסינה לכן גם C לא נכון. כדי ש- E יהיה נכון צריך קודם כל שיתקיים : $i^{10}=1$ אבל מאחר ו- $i^{10}=i^2=-1$ זה לא יקרה. לכן נותר ש- D נכון. ואכן, מתקיים שקיימת P הפיכה כך ש : $A=PDP^{-1}$ ולכן, ע"י חישוב ההופכית בשני האגפים נקבל (נזכור שאם D אלכסונית והפיכה אז ההפכית היא האלכסונית שבאלכסון האיברים ההופכיים בהתאמה) :

$$A^{-1}=\left(PDP^{-1}\right)^{-1}=\left(P^{-1}\right)^{-1}D^{-1}P^{-1}=PD^{-1}P^{-1}$$

$$P\begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}P^{-1}=P\begin{pmatrix} i^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^{-1} \end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}$$

ואם נחשב את A^{79} נקבל :

$$A^{79} = \left(PDP^{-1}\right)^{79} = PD^{79}P^{-1} = P\begin{pmatrix} i^{79} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i^{79} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1^{79} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^{79} \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1} = A^{-1}$$